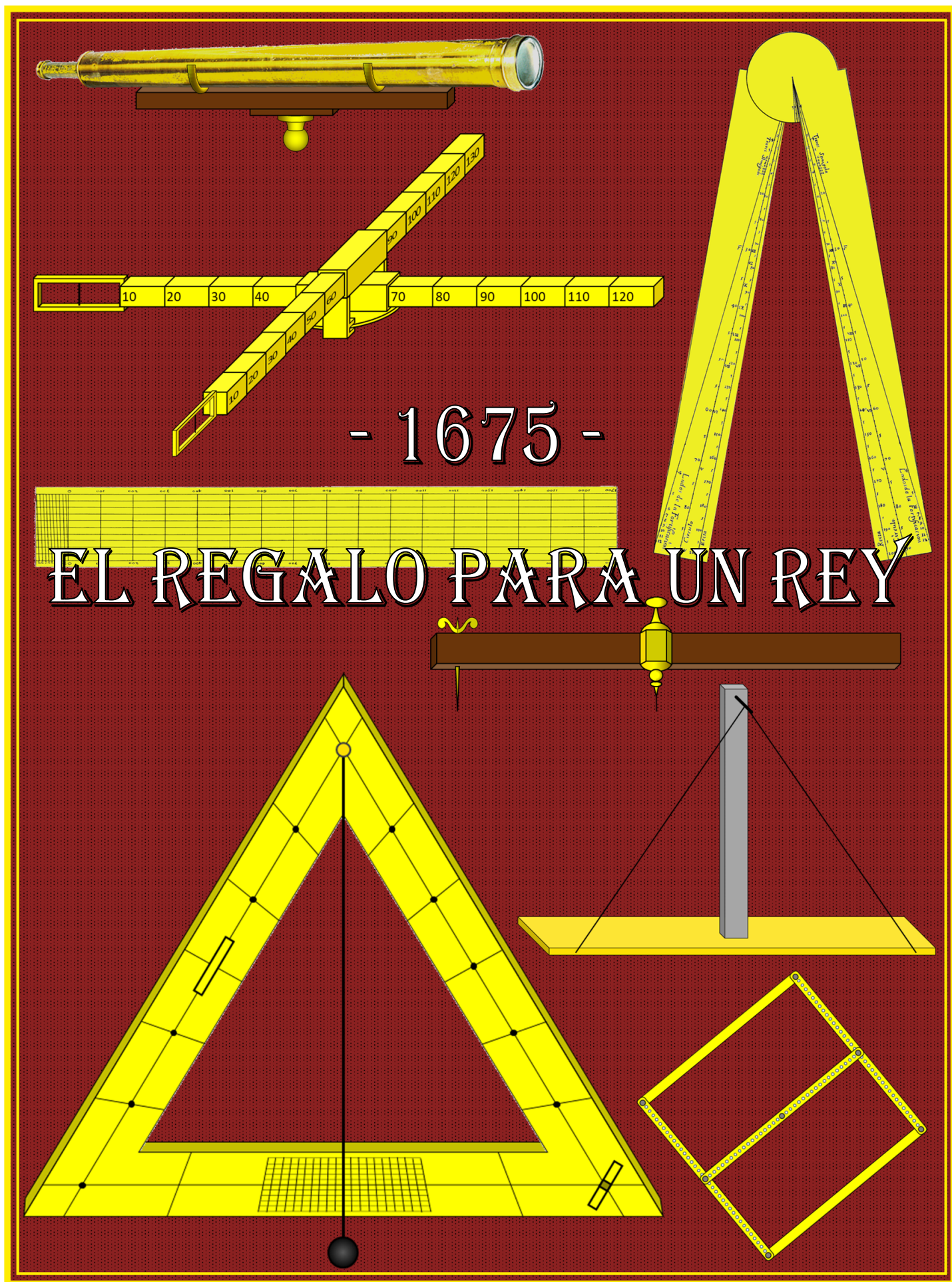




- 1675 -

EL REGALO PARA UN REY

Índice

Breve historia	3
Referencias documentales.....	3
Los contenidos del regalo	3
La Regla de Latón.....	4
Sobre el dibujo de planos	4
La Pantómetra Militar (1ª cara del compás de proporción).....	5
La escala de números	5
La escala de grados	6
La escala para Fortificación.....	7
El Compás Harmónico	8
La escala de Órgano	9
La escala de Guitarra	9
La escala de comas.....	10
Grabación de las escalas en el Compás Harmónico.....	10
Uso de las escalas y afinación con el tetracordo	11
El Triángulo Filar	11
La Cruz Geométrica.....	12
El Rombo Gráfico.....	14
Copiando en horizontal (planos, estampas...)	15
Copiando en vertical (alzados, perspectivas).....	15
El Triángulo Equilátero.....	16
El pie del triángulo	17
Uso del instrumento	18
Los otros instrumentos.....	18
¿Dónde están los instrumentos?.....	20
Comentario Final.....	22
Agradecimientos	23
Bibliografía.....	23

- 1675 - El Regalo para un Rey

Breve historia

En 1675 Carlos II, a sus 14 años, pasaba a ser rey por derecho propio. Uno de los regalos que recibió fue un arcón con “14 objetos matemáticos”. Siendo de 104,5 x 42 x 26 centímetros nos da una primera impresión del tamaño de los instrumentos que incluía, aunque, como veremos después, algunos venían desmontados.

El regalo lo había preparado un ilustre matemático de la época: José Zaragoza, sacerdote jesuita de 48 años nacido en Castellón. Siendo además astrónomo y geógrafo, ostentaba varias cátedras de enseñanza y se relacionaba con los otros personajes relevantes en la Europa de la época. Esto le llevó a ser nombrado maestro del rey y motivó el regalo que nos ocupa.

Para nosotros, coleccionistas de reglas de cálculo e instrumentos afines, cabe destacar la publicación en 1672, de su libro con tablas de logaritmos, el primero en España.

En el arcón se incluye un manual de instrucciones, “Fábrica y Uso de Varios Instrumentos Matemáticos” [1], donde se describen los instrumentos, cómo hacerlos y sus principales usos. La mayoría tienen una aplicación militar y topográfica, con una excepción musical, que es la que me llamó inicialmente la atención.

Referencias documentales

Mi primer contacto con los instrumentos fue a través de un estudio de los conocimientos matemático-musicales de José Zaragoza y su aplicación en el llamado Compás Harmónico [2].

Aunque dicho estudio ya incluye una bibliografía del autor, otras se pueden encontrar en Internet (dada la relevancia de José Zaragoza), como la de la Real Academia de la Historia [3].

Esta última referencia, y su autoridad en el tema, me sirve para confirmar la grafía del apellido, pues al final del libro sale como “Zaragozà” y así también sale mencionado en [2].

Joseph Zaragozà

Tras esta introducción, el libro de Zaragoza ha sido la guía para el desarrollo de este escrito.

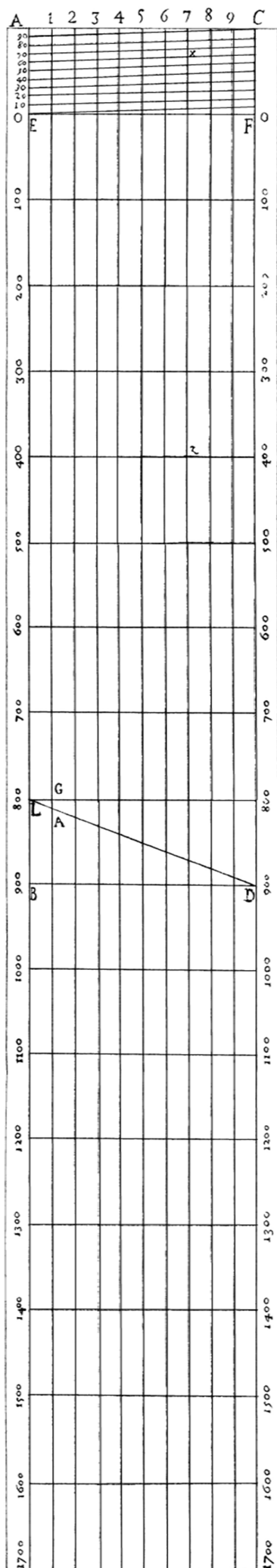
Los contenidos del regalo

Al revisar la lista de los catorce instrumentos creo que yo no los había contado así, pero a continuación la incluyo tal cual:

- 1- Regla de latón
- 2- Pantómetra militar (una cara de un compás de proporción)
- 3- Triángulo filar
- 4- Cruz geométrica
- 5- Rombo gráfico
- 6- Triángulo equilátero
- 7- Triángulo menor
- 8- Anteojo de larga vista
- 9- Compás harmónico (segunda cara del compás de proporción)
- 10- Compás de varilla, complemento del compás de proporción
- 11- Cadenilla de 10 pasos
- 12- Mesa de palosanto, soporte o complemento de alguno de los instrumentos anteriores
- 13- Pie de mesa y de todos los instrumentos (multiusos).
- 14- Escuadra

A la enumeración en el libro, el autor añade al final “*una caxuela de Flandes con varios instrumentos*” (p.6) que no he visto que se mencione en ninguna otra parte del libro. Esto me hace pensar en una pequeña caja (cajuela) en madera de Flandes conteniendo, quizá, uno o dos lápices (en un momento el autor hace referencia a la dureza del lápiz), un juego de reglas (recta, escuadra y para leer ángulos), un compás de puntas y otro con un extremo con lápiz, y puede que un bloque de tinta y una pluma... En definitiva, los complementos para trabajar con mapas, planos, dibujos, etc.

El que estos instrumentos fueran el regalo para un rey creo que indica la importancia para su época. Y la explicación detallada de sus posibles aplicaciones me ha permitido conocer instrumentos aparentemente sencillos pero que permitían solucionar temas tecnológicamente complicados en aquel entonces.



Con cierta dificultad al principio (el libro es el original), pero con mucho interés, he ido leyendo los capítulos donde el autor va explicando los instrumentos. Aquí incluyo un resumen para los instrumentos principales, junto con alguna mención a los secundarios.

La Regla de Latón

En 1675 no existía nada parecido al sistema métrico internacional del que hoy disfrutamos, así que las cosas se medían en pasos, varas, pies, codos, palmos o dedos. Además, diferentes regiones usaban diferentes valores por ejemplo de lo que mide un pie. El padre Zaragoza, tras una descripción de esta realidad, intenta estandarizar su "patrón" (el pie geométrico) escogiendo el valor que le parece más razonable del "pie romano antiguo" (incluso éste tiene al menos dos valores). A partir de ahí, un dedo es la decimosexta parte de un pie, un palmo son cuatro dedos, el codo un pie y medio, y el paso (geométrico) son cinco pies.

En cuanto a la vara, hoy diríamos que una vara son 2,768 pies geométricos, pero creo que en aquel entonces no se usaban los decimales, así que el autor indica que la relación entre un cuarto de vara y un pie es como 10.000 a 14.453. Ya veremos que la proporción, o regla de tres, es la base de la mayoría de las operaciones en el libro.

Para dar valores de nuestros días, en Wikipedia [4] podemos leer que la vara de Castilla son 83,6 cm lo que hace que el pie romano antiguo, o pie geométrico, sean 30,2 cm y el paso geométrico 151 cm.

Dicho esto ¿qué contiene la regla? La regla es una plancha de latón de una vara de largo (84 cm). Una cara es una tabla para la conversión de los valores del pie según ciudades, regiones o países, en cada uno mostrando el factor de conversión con relación a una milésima del pie "Romano Antiguo". Por ejemplo, si el pie romano lo dividimos en 1.000 partes, el pie de Castilla llegaría hasta 923. La otra cara es una regla de medio "paso geométrico", dividido en 5.000 partes. Medio paso son dos pies y medio, así que medio pie queda dividido en 1.000 (la distancia AB de la figura, A en el borde superior izquierdo y B en la línea de 900).

Cualquiera que mire el dibujo verá que entre A y B no hay las 1.000 divisiones que nosotros estaríamos esperando de una regla de hoy en día. Para empezar, las medidas se tomaban con un compás de puntas, y esto supone una manera de medir distinta. Supongamos que deseamos abrir el compás en 467 "unidades" (diezmilésimas del paso geométrico). Los 400 nos los marca la distancia entre el 0 y el 400, pues las medidas "anchas" sirven solo para las centenas.

Para las decenas, buscaremos la línea oblicua marcada con "60" y entonces buscaremos su intersección con la línea vertical marcada con "7", para tener las unidades. Así pues, pondremos las puntas del compás entre los cruces marcados por la "z" y la "x" en la figura. De este modo, solo es necesario trazar las unidades y las decenas de la primera centena para ser capaz de medir de milésima en milésima.

En la figura la regla solo llega a las 1800 unidades, pero eso solo nos indica la limitación del libro, pues las láminas están a medida real. Así, la lámina debe medir unos 27 centímetros, aunque, en la regla, de una vara (84 cm) se incluye medio paso geométrico (75,5 cm), llegando las divisiones hasta 5.000 (de 0 a 4.900 en centenas, y la centena "extra" con las divisiones en decenas y unidades).

En cuanto a lo de "medida real", el padre Zaragoza nos revela que durante el proceso de impresión se moja el papel, que, luego, al secarse, se contrae. Aunque reconoce que esta dilatación del papel mojado es del orden de una sexagésima parte, no aplica corrección para no distorsionar la imagen del objeto real, así que solo avisa del error.

Sobre el dibujo de planos

Gran parte del libro trata del registro en mapas o planos de edificios, o del paso de medidas de un plano a un terreno. En la actualidad tenemos claro lo que es la escala de un plano (1:100.000 ...) pero en aquel entonces esto tampoco estaba estandarizado.

Por esta razón en el libro se habla del pitipíe (del francés "petit pied") y, dadas las unidades de la época, hay que indicar si la escala es un pitipíe de pasos o de pies, etc.

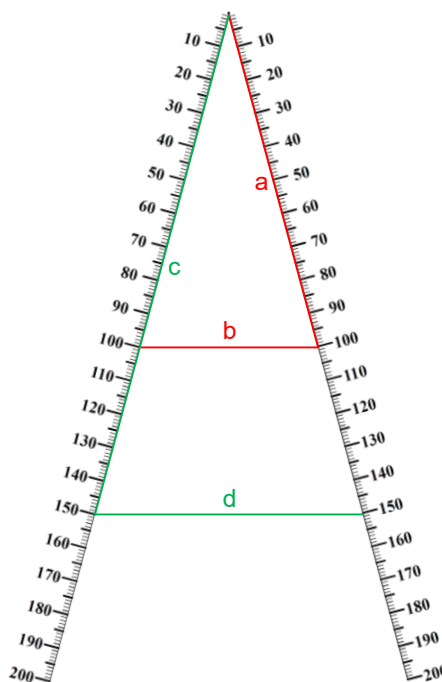
Lámina I, figura 1

La Pantómetra Militar (1ª cara del compás de proporción)

El compás de proporción, o pantómetra, es de una vara de largo también (84 cm), y sus escalas son de medio paso geométrico (75,5 cm). La primera cara está dedicada al cálculo y a la fortificación. Y la segunda a la música, que veremos en el siguiente capítulo.

La escala de números

En esta primera cara tenemos tres escalas dobles. La primera, la escala de números, del 0 al 500, (la lámina solo llega al 200) permite las proporciones (las reglas de tres), y con ellas la multiplicación y la división. El funcionamiento es el ya conocido [5] y basado en la semejanza de triángulos:



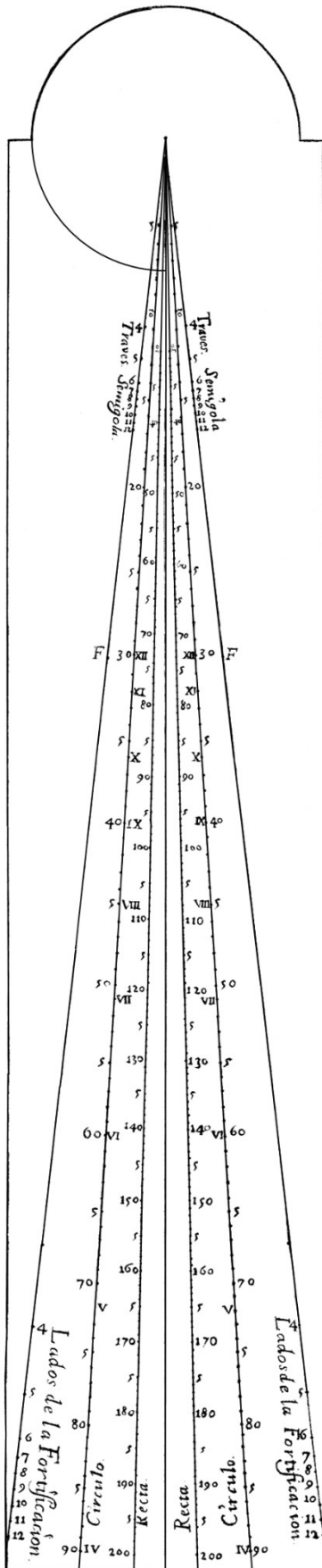
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a * d = c * b \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Si queremos **multiplicar**, podemos tomar "c" o "b" igual a 100 en la segunda igualdad. Si queremos **dividir**, podemos tomar "d" igual a 100 en la primera igualdad. En cuanto a **proporción**, por ejemplo, si de la escala del plano (el pitipié) tomamos con el compás de puntas la distancia "100" y abrimos el compás de proporción de modo que el compás de puntas encaje como "b", entonces podremos abrir el compás de puntas hasta la distancia "d", y será el valor equivalente a "150" en el plano. O viceversa, tomando una distancia en el plano y haciéndola encajar en el compás así abierto nos dará la lectura "c" de la realidad.

Además, si al empezar un plano queremos crear la escala (el pitipié) de modo que los "100" correspondan a una distancia "b" dada, pondremos esa "b" entre los "100" de las escalas del compás de proporción y así podremos traspasar los 90, 80... a la nueva escala (pitipié) tan solo pasando las distancias "90-90", "80-80"... del compás de proporción al plano.

En cuanto a la **regla de tres**, el autor la llama la cuarta proporcional, aludiendo a conocer la cuarta cifra cuando sabemos que "a" es a "b" como "c" es a "x". Otro cálculo interesante es cuando "b" y "c" son iguales. Eso nos lleva a que "a * d = b²", de modo que "b" es la media geométrica (o **media proporcional**) entre "a" y "d". Además, si somos capaces de separar un número en el producto de dos (por ejemplo si uno es 10...), entonces podríamos encontrar "b", su **raíz cuadrada**. Pero eso supondría bastante tanteo...

Lámina I, figura 2



Para encontrar “ $b^2 = a * d$ ”, conocidos “a” y “d” (tal que “a * d” también es conocido), el autor recurre a un método gráfico. En primer lugar, se abre la pantómetra en un valor arbitrario, y con el compás se toma la distancia entre el valor “a” y “a” de las escalas. Sobre una línea trazada, se marca la distancia acabada de coger con el compás, “GI”. Del mismo modo se coge la distancia de “d” a “d” en la pantómetra con el compás y se añade en la línea como distancia “IF”. Considerando ahora la distancia “GF” en la línea, se busca su punto medio y desde éste se traza el semicírculo de diámetro “GF”. Entonces, desde el punto “I” anterior se sube una perpendicular a “GF” cruzando al semicírculo en el punto “K”. Llevando la distancia “IK” a la pantómetra con el compás, ésta quedará entre “b” y “b” de las escalas, siendo “b” la media proporcional entre “a” y “d” o la raíz cuadrada de “a * d”.

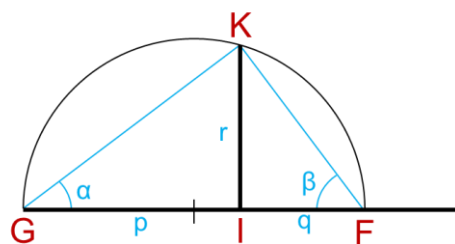


Lámina II, figura 5

Para entender el cálculo gráfico he añadido las líneas en azul claro. Indirectamente hemos creado dos triángulos rectángulos semejantes, donde la suma de los ángulos $\alpha + \beta$ son 90° (el ángulo en el vértice K es recto). De este modo $\tan(\alpha) = 1/\tan(\beta)$, o, lo que es lo mismo:

$$\frac{r}{p} = \frac{q}{r} \Rightarrow r^2 = p * q$$

Así que en este cálculo no se “usa” la pantómetra, excepto para obtener unos valores de “GI” e “IF” que quepan en nuestro papel, y para obtener el valor de “IK” respectivo al final. Se podrían tomar “a” y “d” directamente de la escala de la pantómetra y leer directamente “b” en ésta, al final.

La escala de grados

La segunda escala es de grados, y va de 0° a 90° . Para crearla y dibujarla de grado a grado, José Zaragoza recurre a la división de un cuarto de circunferencia, siendo AB y BC la longitud de estas escalas de grados.

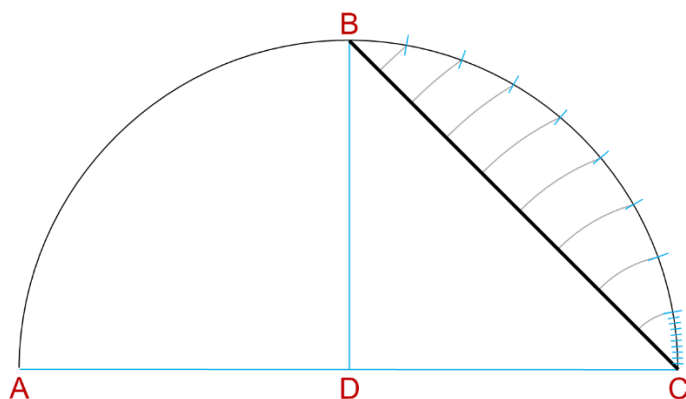
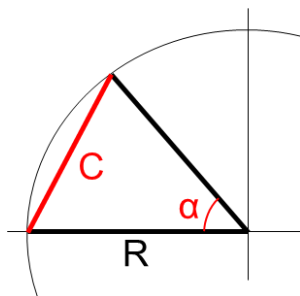


Lámina II, figura 4

Estas escalas en realidad son de cuerdas de circunferencia, pero la conversión de la cuerda “C” al ángulo respectivo “ α ” es fácil, siempre que tengamos la proporción entre “C” y “R”, donde entra en juego la pantómetra:



El radio “R” es igual a la cuerda “C” para un ángulo de 60° , así que poniendo “R” entre “60” y “60” de las escalas de la pantómetra, podremos encontrar la cuerda respectiva para cualquier otro ángulo, tan solo cogiendo la distancia entre “ α ” y “ α ” en las escalas, y viceversa, a partir del valor de una cuerda y conociendo el ángulo respectivo podremos encontrar el radio.

Esto tiene una aplicación directa en el trazado de polígonos inscritos, conociendo el ángulo asociado a cada uno. Y esto viene marcado en las escalas en números romanos:

- Cuadrado: IV $\rightarrow 90^\circ$
- Pentágono: V $\rightarrow 72^\circ$
- Hexágono: VI $\rightarrow 60^\circ$
- Octógono: VII $\rightarrow 45^\circ$

Y así hasta el dodecágono, (XII $\rightarrow 30^\circ$), excepto para los polígonos de 7 y 11 lados, donde sugiere el tanteo o la relación respecto al lado de un hexágono, como 10.000 a 8.678 y a 5.635 respectivamente. Entiendo que es porque los ángulos de estas dos figuras tienen decimales, con lo que no se pueden obtener de la escala que sólo marca los grados.

La escala para Fortificación

La capacidad de dibujar cualquier figura poliédrica es la base para este siguiente apartado, pues la planta de las fortificaciones se basa en figuras geométricas regulares, o en partes de éstas si el terreno no lo permite. Por lo que entiendo del libro, en aquella época las fortificaciones estaban bien definidas y tabuladas. Una vez escogido el polígono que será la base de la planta, las proporciones del resto de estructuras se toman de una tabla. Veamos una parte de la planta de una fortificación pentagonal, y sus elementos del diseño:

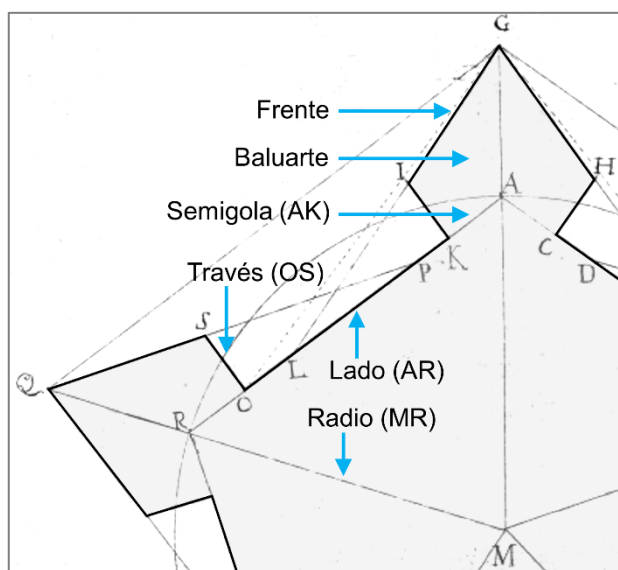


Lámina II, figura 7

El siguiente paso tras dibujar el polígono es dibujar los baluartes. Para ello se siguen los datos de una tabla:

Tabla de la Fortificación Real					
Figura	Radio	Lado	Semigola	Través	Ángulo
(nº lados)	(pasos)	(pasos)	(pasos)	(pasos)	(grados)
IV	103.1	146	23	23	90° 00'
V	131.0	154	27	27	72° 00'
VI	160.0	160	30	30	60° 00'
VII	185.2	162	31	30	51° 26'
VIII	214.1	164	32	30	45° 00'
IX	212.2	165	33	30	40° 00'
X	271.4	168	34	30	36° 00'
XI	301.3	170	35	30	32° 44'
XII	332.1	172	36	30	30° 00'
XV	418.2	174	37	30	24° 00'
XX	562.3	176	38	30	18° 00'
L	1414.1	178	39	30	7° 12'
Recta	Infinito	180	40	30	Recta
La frente del baluarte es de 64 pasos en todas las figuras					

Curiosamente en la columna del radio sí que se incluyen decimales, así como el ángulo para los polígonos de 7 y 11 lados. Después de los baluartes, el resto de elementos (foso, estrada, esplanada, muros...) también sigue unas proporciones, aunque son más a criterio del autor, y sus valores no salen en la escala de la pantómetra. En ésta solo se incluyen los datos de las figuras de cuatro a doce lados.

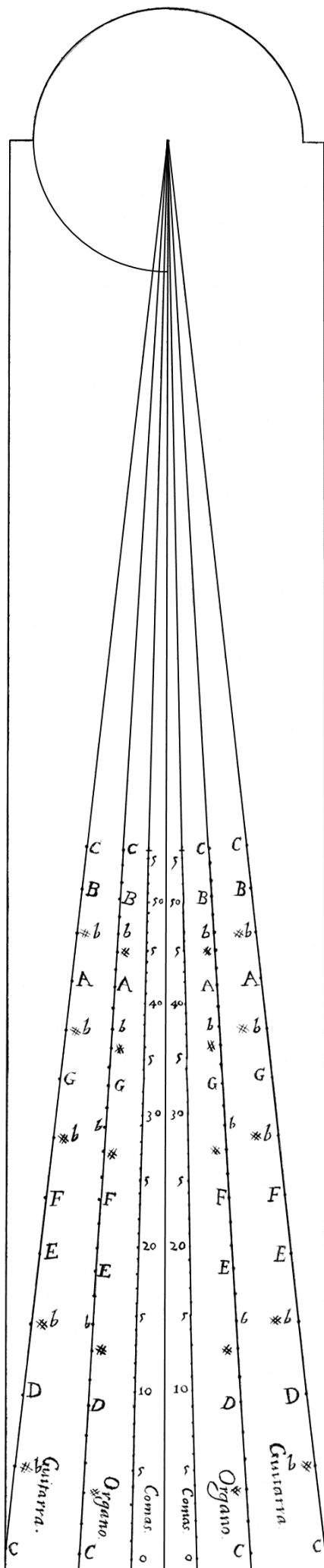


Lámina I, figura 3

Entonces, considerando que el final de la escala se corresponde con los 172 pasos del lado del polígono de 12 lados, se incluyen proporcionalmente las distancias de los otros lados, etiquetándolos con el número de lados de la figura respectiva (de 4 a 12). Con la misma proporción se incluyen los valores de las semigolas, marcándolas con la misma numeración. Así como las marcas para los lados de la fortificación quedan en el último tercio de la escala, las marcas para las semigolas ocupan el primer tercio, con lo que es fácil distinguirlas. A partir de la tabla, vemos también que el través se puede obtener de la semigola. Por último, el valor proporcional de la longitud de la frente del baluarte (64 pasos) queda en la zona central y marcada con la letra F.

El ángulo ya lo tenemos en la escala de grados, y el radio se puede obtener en la pantómetra a partir del ángulo y el lado del polígono en cuestión. Con esto tenemos todas las escalas de esta cara del compás de proporción que José Zaragoza denomina la Pantómetra Militar. Solo añadir que, como hemos visto, ninguna de las escalas es logarítmica.

El Compás Harmónico

En la cara posterior del compás de proporción José Zaragoza incluyó tres escalas para la fabricación de instrumentos musicales (guitarra, órgano y clavicordio), e incluso su afinación por medio de otro instrumento, el tetracordo: una caja de resonancia rectangular con cuatro cuerdas iguales encima y afinadas igual (unísonas).

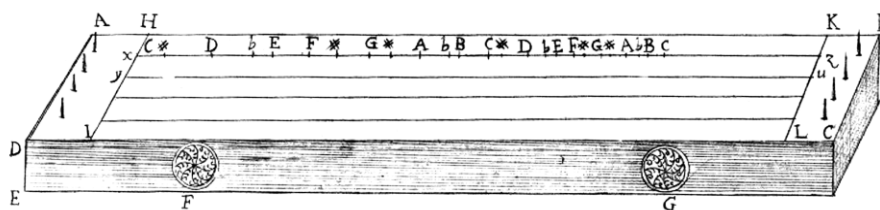


Lámina VII, figura 56

Para explicar cómo se diseñan las escalas, el autor desarrolla un tratado matemático-musical para definir los “espacios” entre notas, los intervalos armónicos, de acuerdo con la consonancia armónica (si suenan bien o no al tocarlas a la vez). En [2] hay una evaluación detallada de sus explicaciones según los conocimientos de hoy en día, a la vez que se valoran sus conclusiones y su relación con otras figuras de la historia, de la época, precursoras y sucesoras.

La proporción armónica de partida es la octava musical (de un Do al siguiente Do, por ejemplo), tal que la relación entre dos notas separadas una octava es de 2 a 1. Hoy podemos decir que su frecuencia es el doble, pero la explicación sencilla es que la relación entre las longitudes de las cuerdas que dan cada sonido es el doble (o la mitad).

Mirando en la imagen del tetracordo, por ejemplo. Si la cuerda del fondo (“xz”) está afinada a “C”, poniendo un puente (sobre el que apoye la cuerda) en su mitad, cada mitad sonará como la siguiente “C”. A mí me queda la duda de cómo hacían para que la cuerda quedara afinada en una “C” (tensando más o menos la cuerda con las clavijas a cada extremo, cómo hacían para saber cuándo se llegaba a la nota deseada).

Para estudiar todos los conceptos musicales mi recomendación es la obra de Klaus Kühn [6], aunque esté en inglés, pues presenta la historia del proceso musical desde la perspectiva matemática (y con logaritmos y reglas de cálculo).

Como resumen diré que hay unas proporciones mínimas, la diesis (125 a 128) y la coma (80 a 81) a partir de las cuales, y por multiplicación, se llega a los tonos, las sextas, las quintas, las cuartas, las terceras, y demás intervalos musicales.

Por otro lado, el ideal en un instrumento es conseguir el “círculo músico”, donde “se pueden encontrar todas las consonancias subiendo o bajando [teclas o cuerdas] con la misma proporción”. Aunque a continuación también dice que

conseguir el círculo es imposible, “pero sacando las consonancias de su lugar, de modo que no ofendan al oído, es facilísimo, pues solo consiste en dividir la Octava o Diapasón en partes iguales”. (p.199)

La escala de Órgano

A partir de ahí, para la fabricación de un instrumento se tendrá en cuenta cuántas notas se quiere incluir en una octava y cuántas partes (proporciones de base) se incluirán. Por ejemplo, para el órgano de cinco teclados la octava se divide en 31 partes (el tono se divide en cinco partes). Cada parte es igual a la anterior multiplicada por la proporción de base. Así, si tenemos la nota más grave (la cuerda tal cual) dividida en 10.000 unidades, la nota a una octava de distancia estará en la mitad de la cuerda, 5.000 unidades. Entonces, matemáticamente, la proporción de base es tal que:

$$5.000 \cdot x^{31} = 10.000 \Rightarrow x = \sqrt[31]{\frac{10.000}{5.000}} \Rightarrow \log(x) = \frac{1}{31} \cdot \{\log(10.000) - \log(5.000)\} \Rightarrow x = 1,0226$$

Como vemos, Zaragoza hace uso de logaritmos (de las tablas que había publicado tres años antes) para calcular la proporción de base (solo explica la fórmula a partir de “[JZ]”, en p.200). Y esto lleva a la tabla (la 5 en el libro) para la escala del órgano (aquí la diesis es la mitad del semitono menor):

C	5.000,00	s.2	7.150,56
b.1, s.2	5.113,05	s.1	7.312,24
b.2, s.1	5.228,67	F	7.477,58
B	5.346,89	b.1, s.2	7.646,66
b.1	5.467,79	b.2, s.1	7.819,57
b.2	5.591,43	E	7.996,38
s.2	5.717,86	b.1	8.177,19
s.1	5.847,15	b.2	8.362,09
A	5.979,36	s.2	8.551,16
b.1	6.114,56	s.1	8.744,52
b.2	6.252,82	D	8.942,24
s.2	6.394,21	b.1	9.144,44
s.1	6.538,79	b.2	9.351,21
G	6.686,64	s.2	9.562,65
b.1	6.837,84	s.1	9.778,88
b.2	6.992,45	C	10.000,00

Si no estoy equivocado, en esta escala la “C” corresponde al Do y las demás notas siguen el orden alfabético. La “s” es el sostenido y la “b” el bemol. En cuanto a esta división en 31 partes indica lo siguiente:

“Esta división es muy antigua en la música. Salinas la menciona, como cosa realizada en Italia, y es autor de hace más de cien años. N.Pomar, [Juan Bautista Pomar] caballero valenciano, hizo un órgano de cinco teclados que presentó al padre de Vuestra Majestad (que está ya en el cielo) y que se puso en la Real Capilla... Fue un prodigio que este caballero sin hacer cálculos y con solo el sentido natural llegase a conseguir esta división. Después, D. Félix Falcó de Belaochaga con Francisco Serrano, ambos muy versados en matemáticas, buscaron con números esta división, aunque con incomparable trabajo de seis meses, por no tener la fórmula que queda explicada en las prácticas antecedentes. D. Félix me enseñó la tabla y le di la regla con que la pudo haber hecho con suma facilidad”. (p.204)

La escala de Guitarra

Para la guitarra española (aunque dice que también se puede aplicar en órganos, clavicordios y harpas de dos órdenes), usa una división en 12 partes, o lo que es lo mismo, usa una proporción de base tal que:

$$5.000 \cdot x^{12} = 10.000 \Rightarrow x = \sqrt[12]{\frac{10.000}{5.000}} \Rightarrow \log(x) = \frac{1}{12} \cdot \{\log(10.000) - \log(5.000)\} \Rightarrow x = 1,0595$$

Y esto lleva a la tabla (la 6 en el libro) para la escala de la guitarra:

C	5.000,00
B	5.297,31
s.b.	5.612,31
A	5.946,03
s.b.	6.299,65
G	6.674,19

s.b.	7.071,06
F	7.491,53
E	7.937,00
s.b.	8.408,97
D	8.908,99
s.b.	9.438,74
C	10.000,00

Tanto en esta tabla como en la anterior he puesto los números del libro. Con una hoja de cálculo se puede comprobar la exactitud de los mismos. De esta división en 12 partes comenta:

“Esta división, aunque es la más común por ser la de la guitarra, creo que es la menos estudiada por los músicos, pues no se han valido de ella suponiendo su imperfección, sin demostrarla ni experimentarla. Las conveniencias que tiene son manifiestas en la guitarra, pues dentro de sus consonancias da perfectamente el Círculo Músico. Y si se aplica al órgano con las trece teclas, que hacen doce intervalos, se hallará todo lo que se puede desear en la música. Y aunque es verdad que es con la imperfección que antes he ponderado, no es sensible la diferencia...” (p.210)

Y más adelante refiere que teniendo que renovar el órgano de la Capilla Real, pidió al “artífice” que hiciera también un órgano pequeño estructurado según esta configuración para uso del rey Carlos II.

La escala de comas

Esta escala usa como proporción de base la de la coma (sintónica), es decir, 80 a 81 (o 0,98765), y la tabla queda:

0	10.000,000	29	6.974,998
1	9.876,543	30	6.888,887
2	9.754,610	31	6.803,839
3	9.634,183	32	6.719,841
4	9.515,243	33	6.636,880
5	9.397,771	34	6.554,943
6	9.281,749	35	6.474,018
7	9.167,159	36	6.394,092
8	9.053,984	37	6.315,152
9	8.942,207	38	6.237,187
10	8.831,809	39	6.160,185
11	8.722,774	40	6.084,133
12	8.615,086	41	6.009,021
13	8.508,727	42	5.934,835
14	8.403,681	43	5.861,566
15	8.299,932	44	5.789,201
16	8.197,463	45	5.717,729
17	8.096,260	46	5.647,140
18	7.996,306	47	5.577,422
19	7.897,586	48	5.508,565
20	7.800,085	49	5.440,558
21	7.703,788	50	5.373,391
22	7.608,680	51	5.307,052
23	7.514,745	52	5.241,533
24	7.421,971	53	5.176,823
25	7.330,341	54	5.112,912
26	7.239,843	55	5.049,789
27	7.150,462	56	4.987,446
28	7.062,185		

Para en el valor 56 pues ya sobrepasa la octava, el 5.000. De esta escala dice que “se pueden examinar las comas que entran en la octava y en cualquiera de los otros intervalos harmónicos”. (p.217)

Grabación de las escalas en el Compás Harmónico

Teniendo ya todos los valores, se trazan los tres pares de líneas y se toma la máxima distancia en el par exterior (Guitarra) y se pasa radialmente a los otros dos (Órgano y Comas). De este modo tenemos el punto de 10.000 unidades de cada escala (la primera “C” tanto en “Guitarra” como en “Órgano” y el “0” en “Comas”). A partir de ahí y guardando la proporción (usando la escala “Recta” en la otra cara del Compás de Proporción) se irán marcando todos los otros puntos. Naturalmente, las escalas acaban a la mitad de la línea de la escala, alcanzada la octava. En la escala de comas (que se

pasa un poco de la mitad) se puede marcar también el valor 5.000, de la octava, por ejemplo con una raya para distinguirlo de las divisiones de la escala.

Hemos visto que en cada escala la posición de la marca siguiente (nota musical o coma) es igual a la posición de la marca anterior multiplicado por un factor constante. En definitiva, y como sugiere el autor, podemos trabajar con logaritmos y para cada marca sumaremos una constante a la anterior. Pero, en todo caso, vemos que tampoco son escalas logarítmicas.

Uso de las escalas y afinación con el tetracordo

El uso de las escalas es sencillo, una vez conocido el uso de las escalas en el otro lado del compás de proporción. Con un compás de varilla (ver más adelante) tomamos la medida de la cuerda en la guitarra (de la cejuela a la selleta o puente, actualmente 65 cm) y, abriendo el compás, la situamos entre las “C” inferiores. A partir de ahí se tomarán del compás las distancias proporcionales y se pasarán a la guitarra, marcando la posición de los trastes.

De igual manera se hace en el tetracordo, partiendo de la longitud entre los puentes “LK” y “HI”, y se marcan los puntos según la tabla o mejor con el compás de proporción. Su uso, una vez afinada su cuerda a la “C”, consiste en poner un puente móvil en cada una de las marcas y entonces tocar la tecla o cuerda respectiva del instrumento a afinar, y tensar o aflojar hasta que ambos instrumentos suenen igual (las cuerdas sean unísonas). En el tetracordo se puede marcar una escala diferente debajo de cada cuerda, y esto permitirá afinar varios tipos de instrumentos.

El Triángulo Filar

El triángulo filar es un instrumento para trazar líneas en el terreno. Se trata de una mira vertical de alineación, y se complementa con una mesa que contiene el plano con las líneas de referencia. Sobre una “*regla de por lo menos media cuarta de ancho y de largo media vara*” (10,5 x 42 cm) “*de madera o metal*” (p.95), se fija “*otra regla cuadrada de un dedo y perpendicular*” (2 cm de grosor y supongo que unos 21 cm de altura), de modo que diste dos dedos (4 cm) de uno de los bordes largos de la base. En el extremo superior de la regla vertical se fija un clavo perpendicular de tres dedos (casi 6 cm), y se ata un hilo desde los vértices del borde largo de la regla de base hasta el clavo, de forma que el triángulo que describe el hilo sea perpendicular a la base (paralelo a la regla vertical).

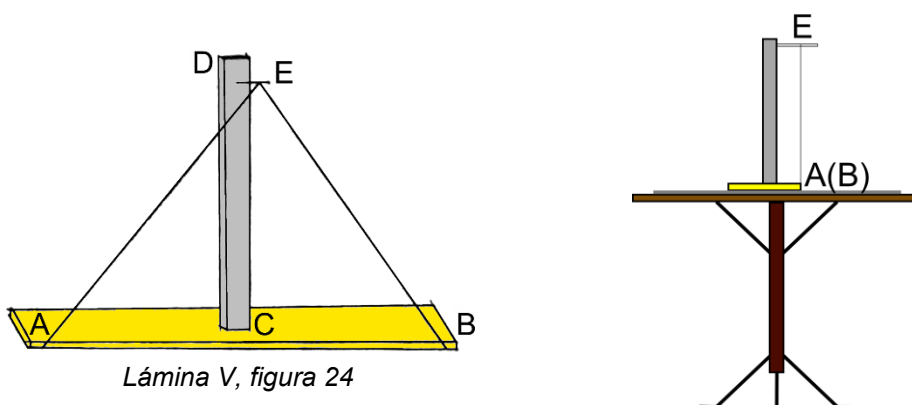


Lámina V, figura 24

El plano que contiene AEB es vertical, y AB es el borde que usamos de la regla de base. Colocando el instrumento sobre un plano en una mesa, podremos alinear AB con una línea en el plano, y luego mirando desde A la vertical AE nos permitirá, por ejemplo, alinear y clavar un poste con una cuerda a la distancia que queramos. Por otro lado, “colocando” mesa, plano e instrumento alineados sobre una línea ya trazada en el terreno, podremos girar solo el instrumento, de modo que AB quede en línea con otra línea del plano, en un ángulo respecto a la primera. Eso nos permitirá trazar una nueva línea en el terreno (mirando según AE), la cual mantendrá dicho ángulo respecto a la línea inicial del suelo.

Y, si ahora cogemos mesa, plano e instrumento, y los desplazamos una cierta distancia a lo largo de la nueva línea trazada, volviendo solo el triángulo filar a la posición de la primera línea del plano, esto nos permitirá trazar una tercera línea sobre el terreno y paralela a la primera.

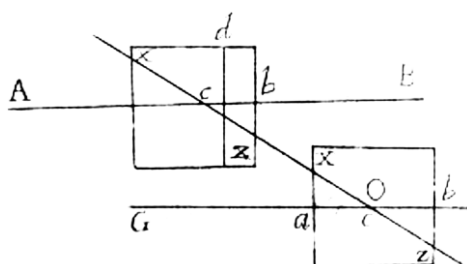


Lámina V, figura 26

Otra alternativa de uso es el trazado de mapas. Por ejemplo, dados los puntos 1 a 5 en una región, desde el punto 5 con el instrumento sobre la mesa, trazaremos en un plano las líneas según que vemos los puntos 1 a 4 (y las numeraremos).

Luego, por ejemplo, nos desplazaremos al punto 1, alinearemos la mesa para que la línea de 1 a 5 coincida y tenga la distancia proporcional deseada (según una escala), y trazaremos las líneas según que ahora vemos los restantes puntos, 2, 3 y 4 (y las numeraremos). Las intersecciones de las líneas con el mismo número nos situarán todos los puntos en el mapa.

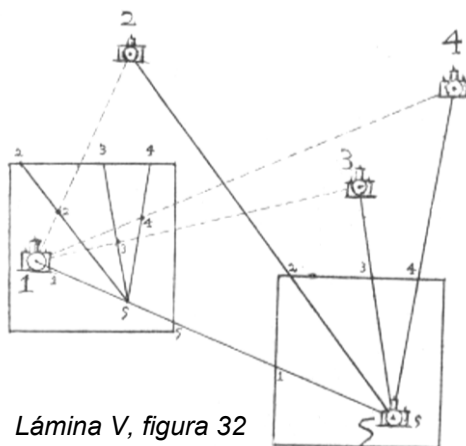


Lámina V, figura 32

Las opciones son múltiples. El padre Zaragoza llega a reconocer que fue capaz de trazar los túneles de una mina con este instrumento, una luz para marcar los puntos distantes al final de cada tramo de túnel y algo para medir las distancias recorridas. La mesa con el instrumento le sirvieron para marcar los ángulos de giro en cada recodo, cruce, etc.

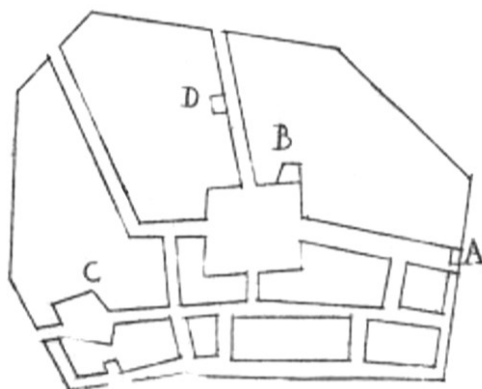


Lámina V, figura 35

La Cruz Geométrica

“La cruz geométrica es un instrumento que consta de dos varas en forma de cruz y sirve para las medidas del terreno: alturas, profundidades y distancias en llano o en monte. Aunque se llama cruz, no siempre conserva los brazos en ángulo recto... No es necesario ningún cálculo, pues la misma nos da la medida sin necesidad de multiplicar o dividir” (p.121-122)

Tal como lo explica el padre Zaragoza parecería un puntero láser. Y la verdad es que, tolerancias aparte, hace lo que dice. Dos varas de sección cuadrada y una más gruesa que la otra llevan marcadas divisiones en la misma unidad (el valor de la unidad no es relevante). Aconseja entre tres y cuatro pies de longitud (entre 90 y 120 cm) para la vara gruesa, y la fina puede ser más pequeña. También indica unas 3000 divisiones en la vara gruesa y las correspondientes en la fina.

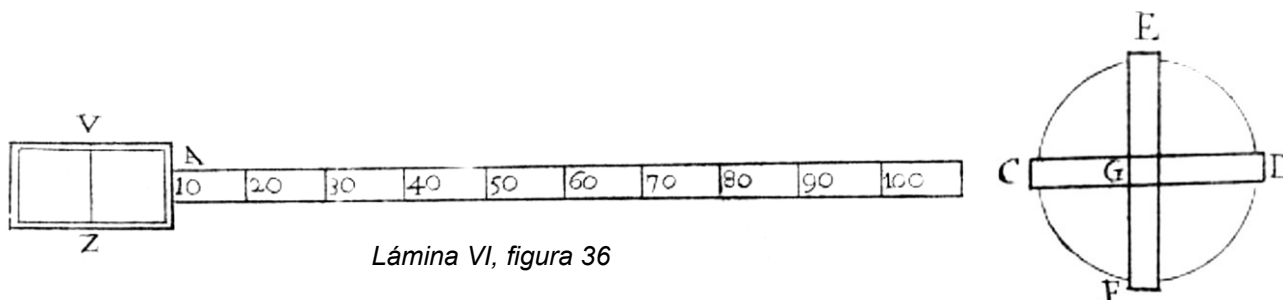


Lámina VI, figura 36

Para la fijación de las varillas en cruz, permitiendo a la vez el deslizamiento relativo, la Cruz lleva en su centro un sistema de dos tubos de sección cuadrada (“CD” y “EF”) sujetos a una base circular. Estos tubos tienen una longitud de 20 unidades con lo que no se puede ver el punto central de cruce (“G”) ± 10 unidades (ver una reconstrucción más adelante). Por último, el instrumento se acopla al pie multiusos, por medio de una rótula que permite poner la Cruz horizontal (para distancias horizontales) o vertical (para distancias verticales). El uso del instrumento es por triángulos semejantes. Por ejemplo:

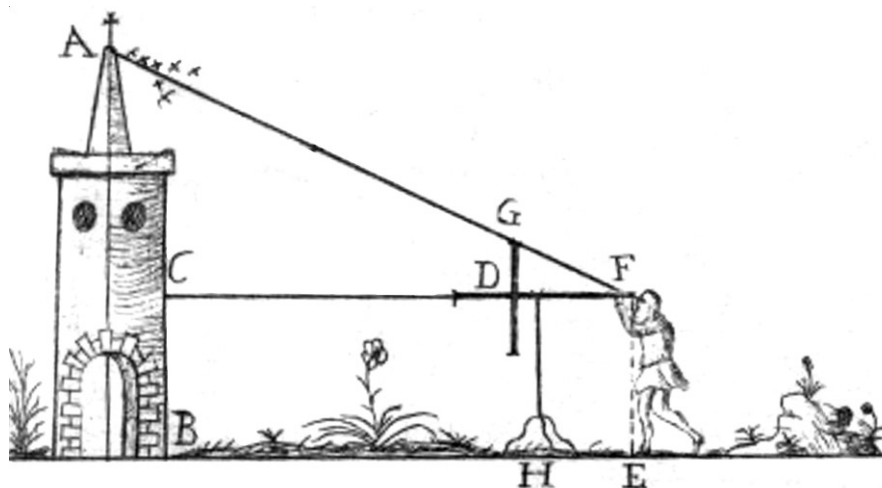


Lámina VI, figura 37

En la imagen, si conocemos la distancia "BE", de la punta más alejada del instrumento a la torre, podemos fijar ese valor en "unidades" en el brazo mayor (distancia "DF"). Si entonces subimos el brazo menor de modo que el extremo "G" esté en línea con "F" y "A", entonces el triángulo "FAC" es semejante al triángulo "FGD" y podemos leer el valor de "CA" en las "unidades" de "D" a "G". Sumando finalmente la altura del pie, "DH", tendremos la altura del edificio, "AB".

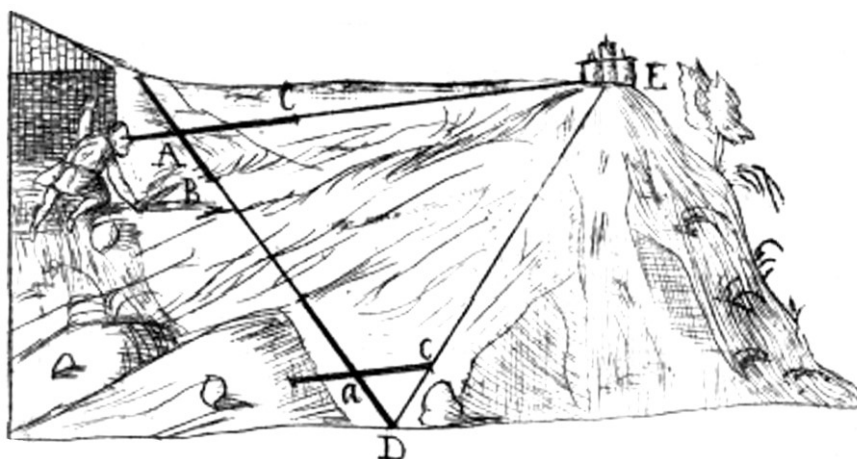


Lámina VI, figura 39

En este segundo ejemplo, conocemos la distancia "AD" (la escogemos nosotros). En primer lugar, en la posición "A" ajustamos el ángulo de los brazos de la cruz de modo que un brazo apunte al objetivo "E" y el otro al punto conocido "D". Entonces ajustamos la longitud del brazo "AB" de modo que las "unidades" coincidan con el valor de la distancia "AD" conocida. Llevamos ahora la cruz al punto D, y la colocamos como se ve, con el extremo llamado "B" (en el punto "A") situado en el punto "D", (y siendo la distancia ajustada "AB" ahora "aD"). Entonces movemos el otro brazo (sin cambiar el ángulo entre brazos) de modo que "C" quede alineado con "D" y "E". En este momento, el triángulo "DaC" es semejante al "DAE", con lo que en el brazo "aC" podremos leer en "unidades" el valor de la distancia "AE".

Hasta seis ejemplos pone el padre Zaragoza (con sus respectivas imágenes) para mostrar la gran versatilidad de este instrumento, llegando a la obtención de la distancia "BA" conociendo la distancia "DC" en la siguiente imagen, ejercicio que dejo para el lector.

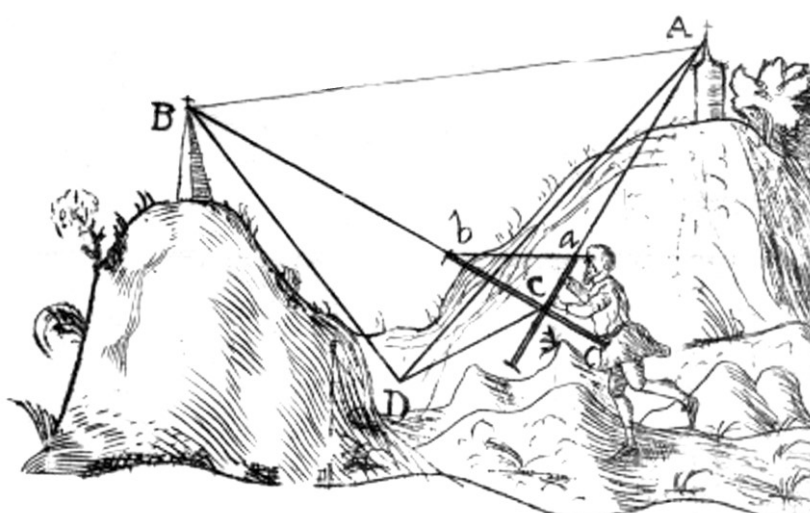
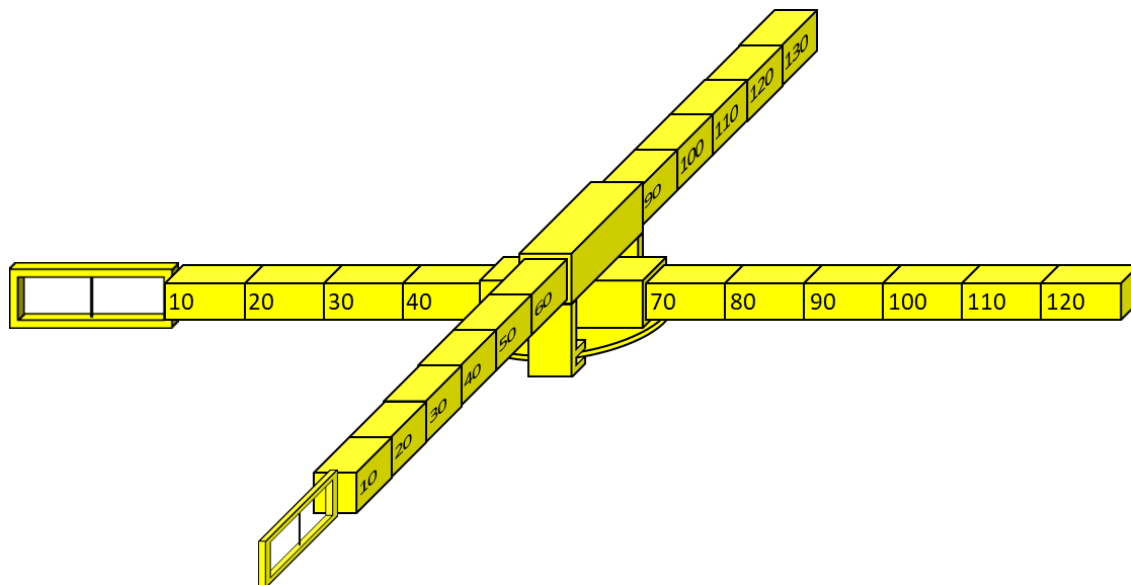


Lámina VI, figura 42

Una recomendación que da el autor es que “se tiene que procurar que los ángulos de la cruz no sean muy agudos” pues entonces los errores en la medida “dan siempre poca verdad” (p.133).

Por último, hay un párrafo que no he podido comprender, quizá por no tener el instrumento real en mis manos. En todo caso aquí lo describo por si alguien lo viera claro. He preparado una recreación de cómo creo que sería el instrumento, a partir de las imágenes del autor (hay una tercera que no he incluido aquí) y sus explicaciones:



Cada división en las varillas dibujadas representa 10 unidades. Entonces en cuanto a las pínulas (o miras), dice:

“Son necesarias dos pínulas que tengan de alto... 20 divisiones de la vara. ...se pondrán en los extremos de las varillas, donde está la primera división. ... En la vara... tiene que estar fija en la testa... de modo que el hilo de índice “VZ” diste del punto “A” tanto como la división 10, y con esto será igual a “GC”. Como las 10 partes que cubre “GC” las da la pínula, entonces en todas las operaciones se ajusta según el número que cortan los extremos “C” o “E”, sin necesidad de añadir o quitar”. (p.125)

Según se ve en mi representación, y en la figura 36 del libro (incluida más arriba), el hilo de índice marca el “0” de la escala. Entonces, para ajustar la vara a la distancia ésta debe ir del “0” en el hilo al centro de la cruz (el punto “G” en la imagen original), así que no entiendo lo de “sin necesidad de añadir o quitar”. Por ejemplo, en mi reconstrucción el punto central en la vara “paralela” al papel está en “60”, pero en “C” tenemos “50” (en la oblicua el centro está en “80” y “E” en “70”). Ahora bien, también dice “el hilo de índice diste del punto “A” tanto como la división 10”, que en la imagen ya está en “A”, quizá indicando o bien que el hilo de índice debería quedar en “A”, o bien que el primer número grabado debería ser “20”. De este modo sí que la numeración estaría desplazada 10 unidades y al leer en el extremo “C” o “E” de los tubos centrales el valor correspondería al del centro “G”.

El Rombo Gráfico

“El rombo gráfico es un instrumento universal para copiar un mapa, o las plantas de las fortificaciones, y también cualquier estampa o cuadro, con seguridad de guardar exactamente las medidas proporcionales al original. Y la misma facilidad tiene para dibujar en perspectiva cualquier edificio al respecto del punto desde donde mira el que dibuja” (p.135).

De nuevo una descripción de un instrumento con una gran funcionalidad. Ya avanzo que es el diseño básico de lo que hoy llamamos pantógrafo. La imagen del instrumento es:

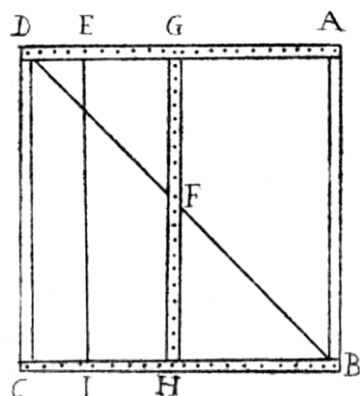


Lámina VI, figura 43

Consta de cinco varillas de igual longitud (por ejemplo de un pie, 30 cm) y fijadas en los cruces sin rigidez, permitiendo la deformación en rombo (de ahí su nombre). El autor reconoce que “CD” en realidad no es necesaria, o puede estar en otra posición, como “EI”. “AD”, “BC” y “GH” tienen una serie de orificios a las mismas distancias y numerados de “A” a “D”, de “B” a “C” y de “H” a “G”.

En el vértice “B” se coloca la puntilla “L” (de dos dedos, 4 cm, de largo). En el vértice “D” la pluma para “*lápiz de plomo*” “M”, “*que es suave y con él se dibuja fácilmente*” (p.137), de altura total como “D”. En “A” y “C” unos pies como “N”, que pueden ser ligeramente menores que “D”. “O” representa un tornillo simple (con una zona sin rosca para que una vez apretado aún dé juego a la unión), para los puntos “G” y “H”.

Por último, para uno de los puntos entre “G” y “H” se usa el pie “P” de fijación. En su parte inferior tiene una rosca para fijar a una mesa, y una superficie cuadrada para asegurar su perpendicularidad a dicha mesa. En su parte superior otra rosca sobre un disco para la fijación del rombo. La distancia entre disco y cuadrado es como la de “N”, de modo que una vez montado, tanto “L” como “M” toquen bien los papeles.

Copiando en horizontal (planos, estampas...)

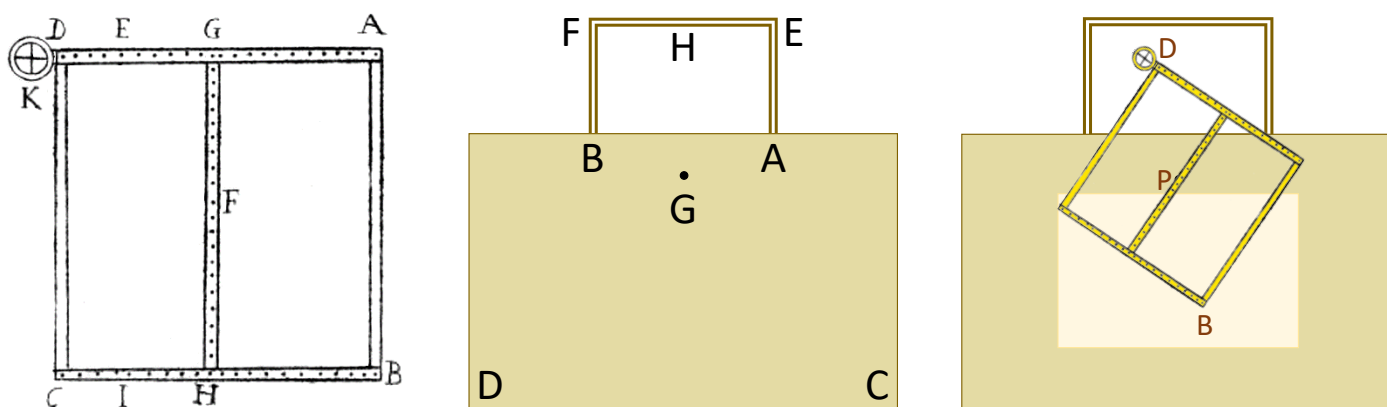
Una copia 1 a 1 se hace con la configuración de la imagen y con el pie “P” en el centro de “GH”. Si se quiere la copia mayor que el original se pondrá la varilla “GH” más cerca de la puntilla “B” que de “C” (y siempre perpendicular a “BC” y “AD”). La proporción del original a la copia será igual a la relación de “BH” a “HC”. Viceversa si la copia ha de ser menor que el original. El pie “P” en “GH” se pondrá en la misma distancia “HP” (o “HF”, si el pie “P” se pone en “F”) que “BH”. Como comprobación, los puntos “B”, “F” y “D” deben quedar siempre alineados.

Por ejemplo, ponemos “GH” en los agujeros “13” tanto de “AD” como de “BC” (posición 13, 13). Y si las varillas tienen 51 agujeros (50 espacios) entonces la relación será de 12 espacios (del original) contra 38 (de la copia). A partir de aquí, se procede como con un pantógrafo moderno: con la puntilla “L” se sigue (sin apretar) todo el original mientras la pluma “M” dibuja la copia (pero invertida).

A tener en cuenta durante la operación que los pies “N” no se traben con los bordes de los papeles. También el lápiz tiene que ser blando y estar afilado, teniendo que ponerle un pequeño peso si no apoya lo suficiente. Otra recomendación del autor es que como seguir bien una línea recta a mano alzada puede ser difícil, se puede marcar solo su principio y su fin, para luego completarla con una regla (esto se puede extrapolar a cualquier trazado, utilizando la regla de curvas adecuada y marcando solo los puntos clave). Además, cuando sea necesario pasar de una zona a otra del dibujo, habrá que levantar la pluma “M” para que no dibuje rayas indeseadas.

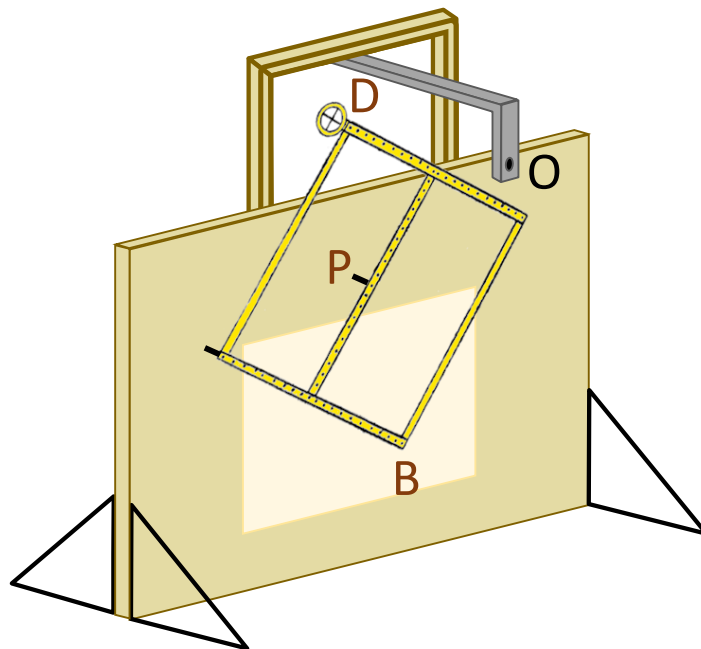
Copiando en vertical (alzados, perspectivas)

Volviendo a la figura del rombo, ahora ponemos la pluma “M” en el vértice “B” y en “D” ponemos la mira “K”, bien sustituyendo “AD” por otra varilla acabada en la mira, o bien porque la varilla “AD” en realidad está compuesta por un tramo largo y uno corto que se puede sustituir por otro tramo corto igual, pero con la mira “K” (siempre asegurando la robustez final del tramo “AD”).



Nuestra mesa de dibujo (o de copia) ahora es vertical (ABDC) y sobre ésta tenemos un marco “AEFB” que dará el encuadre del original. En el punto G se fija el rombo, o sea, se pone el pie “P”. La disposición de las varillas entre sí es como se explica antes, según se busque solo copiar, ampliar o reducir.

La última pieza es una mira para el punto de vista de la perspectiva. Consiste en una pieza en “L” que cuelga del punto “H” (fijada ahí con un tornillo). El montaje quedaría como sigue:



Mirando desde el agujero “O” (que quedará en el centro del encuadre), moveremos la mira “D” siguiendo la silueta del edificio o escena que queramos que “M”, en “B”, dibuje en el papel.

El Triángulo Equilátero

El triángulo, que es desmontable, sirve para medir ángulos en horizontal o vertical en el terreno. Consta de tres planchas de latón de cuatro dedos de ancho (7,5 cm), tres pies y medio de largo (105,7 cm), y “*el grueso de dos reales de a ocho*” (unos 6 mm [9], p.155). Las planchas encajan unas con otras para formar el triángulo y los tornillos de fijación (en cada vértice y centrados en el ancho de éstas) están perforados para poder insertar los complementos: un hilo con un peso “F” (péndulo, plomada o perpendicular), y cuatro miras (pínulas), cuyo uso veremos ahora.

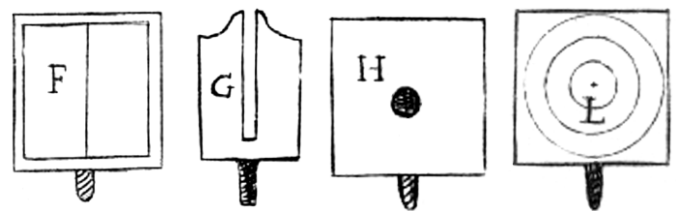
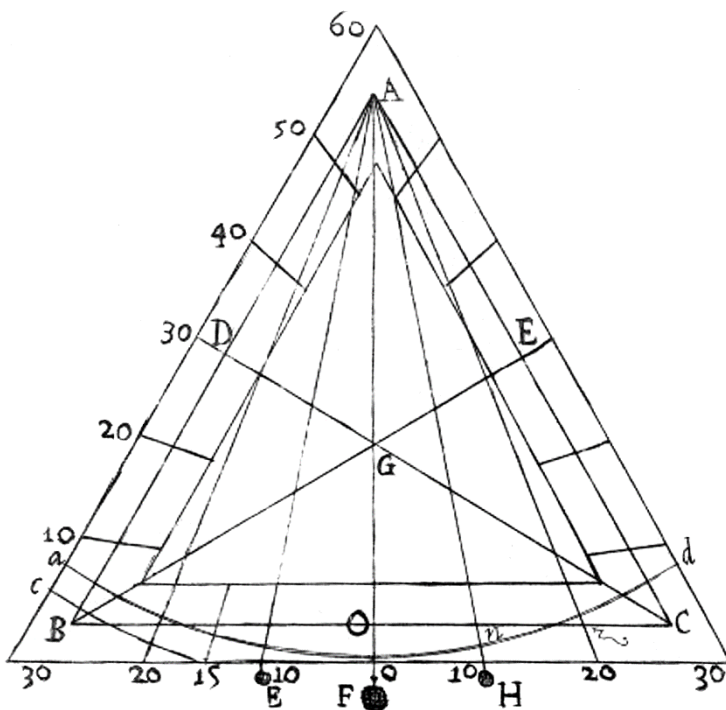
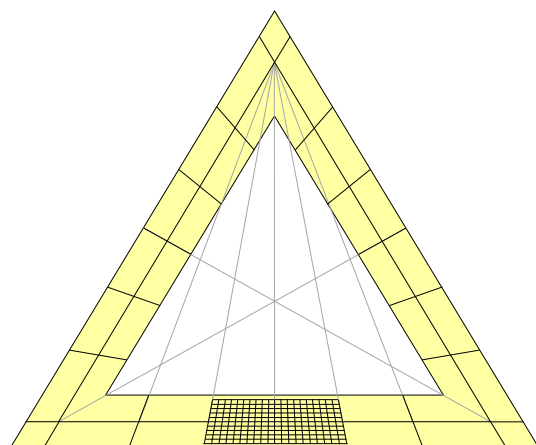
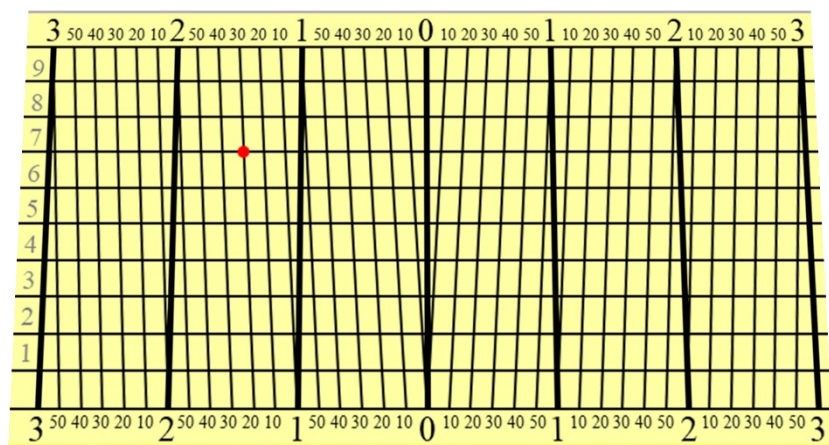


Lámina VII, figuras 47 y 49

“A”, “B” y “C” son los vértices del triángulo equilátero de base para las marcas grabadas. “O” marca el centro entre “B” y “C”. Entre “B” y “O” hay 30° y dividiendo en tres partes (a partir del arco “aod”) tendremos las marcas de 10° y 20° respecto de “O”. Del mismo modo marcamos los 10°, 20° y 30° desde “O” hasta “C”. Y de igual manera se marcan los lados “AB” (con “D” como centro) y “AC” (con “E” como centro), aunque la numeración irá de 0° en “B” (o “C”) a 60° (en “A”).

Seguidamente se marcan los grados de 0° a 10° entre “O” y “B” y entre “O” y “C”, y además se marcan los minutos según el siguiente diagrama (como en la regla de latón):

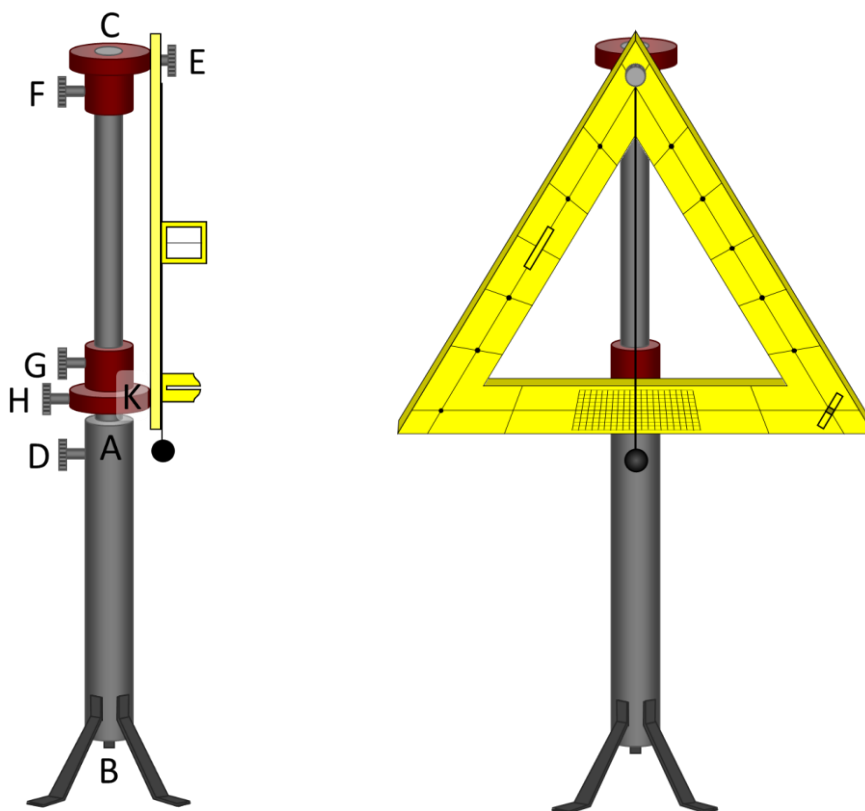


Las líneas horizontales dividen el ancho de la plancha en doce partes, o sea, que se trazan 11 líneas. La numeración de los grados será mayor que la de las decenas de minutos, para evitar confusión, (y las unidades de minuto, en gris, se sobrentienden y no se marcan). Por ejemplo, el punto rojo marca el grado y 27 minutos "hacia B" ("O" se corresponde con el 0).

La mira "F" se podrá enroscar en cada uno de los puntos 10, 20, 30, 40, 50 o 60 tanto del lado "AB" como del lado "AC", y la mira "G" se enroscará en "C", si "F" está en un punto de "AB", o en "B", si "F" está en un punto de "AC". El par "H" y "L" sustituirá al par "F" y "G" cuando las observaciones sean del sol (lo vemos más adelante).

El pie del triángulo

El pie multiuso es también parte del arcón, que aquí se usa para mantener el triángulo en vertical, como en esta simulación:



El pie parte de un cilindro dentro de otro, ambos de "cuatro cuartas y media" de altura (distancia "AB", p.162). Si la "cuarta" es de una vara castellana esto serían unos 94 cm, con un total de 188 cm. El cilindro interior es un poco más largo, para permitir la fijación con el tornillo "D". Tres cartelas atornilladas con dos tornillos cada una forman el pie.

Sobre esta estructura se coloca el complemento con los tornillos "F" para fijarlo y "E" para colgar el triángulo en su agujero "x" que no se ve en la lámina original, así que lo he asumido. El otro complemento, con el tornillo "G" y el clavo "H" es para asegurar la verticalidad. El triángulo toca en el punto "K" y el tornillo "G" es para su fijación. El hilo vertical con el peso queda así enrasado con el triángulo. El clavo "H" puede girar sobre su eje, de modo que poniendo otro hilo desde uno de los vértices "B" o "C" del triángulo y enroscándolo en "H", podremos tensarlo girando "H", atrayendo así el vértice respectivo, con lo que podremos hacer que el péndulo caiga en las marcas de grados y minutos hacia "B" o hacia "C".

A parte de esta configuración, si en el complemento con el tornillo “G” atornillamos otras tres cartelas hacia arriba (ver figura 51, más adelante), esto nos definirá una superficie (en forma de Y) sobre la que podremos poner el triángulo abatido para medir desviaciones en horizontal. Para ello, hay que poner este complemento en la parte superior del cilindro interior, y las cartelas deben tener el tamaño de “GO”, “GD” y “GE” (ver el uso en el triángulo menor, más adelante).

Uso del instrumento

En la última figura se ve la mira “F” en los 30° del lado “AB” y la mira “G” en el vértice “C”. Mirando desde “G” intentaremos alinear su rendija con la línea de índice en “F” y con la estrella que estemos observando. Si la estrella está por encima, podemos probar a poner “F” en los 40°, y si por debajo en los 20°, hasta que quede al revés, por debajo o por encima de la mira. Entonces, girando el clavo “H” inclinaremos el triángulo en la dirección respectiva hasta conseguir la alineación de “G” con “F” y con la estrella.

Si, por ejemplo, hemos bajado “F” a los 20° y luego, tirando de “B” al girar “H”, hemos conseguido la alineación, entonces vemos dónde el hilo del péndulo corta las marcas de la escala horizontal de grados. Si por ejemplo el cruce está en 1 grado y 27 minutos (como el punto rojo de la figura previa) entonces la estrella estará a 21 grados y 27 minutos. Jugando con la posición de la mira “F” y “tirando” del vértice “B” o “C” con el hilo enroscado en “H” podremos leer alturas desde los 0° (la mira “F” en 10° y el péndulo en -10°) hasta los 70° (la mira “F” en 60° y el péndulo en +10°).

Para medir un ángulo superior a 70°, hay dos alternativas. La primera es marcar con grados y minutos hasta “B” y hasta “C” (todo el lado “BC”) y proceder como hasta ahora, “tirando” de los vértices “B” o “C” con el hilo enroscado en el clavo “H”. La segunda consiste en poner la mira “F” en el punto “A” y la mira “G” en el punto “z” o el punto “n”. El punto “z” está en el cruce de la línea “BC” con la línea de 20° de “O” a “C”, lo que nos permitirá medir ángulos de 70° a 80°. El punto “n” está en el cruce de la línea “BC” con la línea de 10° de “O” a “C”, lo que nos permitirá medir ángulos de 80° a 90°.

La primera alternativa (todo “BC” en minutos) permite medir con menos movimiento de miras (hay $\pm 30^\circ$ de ajuste con el péndulo), y la segunda permite un primer ajuste “grueso” con las miras y un segundo “ajuste fino” con el hilo de “H” (y teniendo menos marcas en “BC”).

Como comenté antes, para medir la altura del sol se usan las miras “H” y “L”, pues no se mira al sol con el ojo, sino su brillo sobre “L” al atravesar el orificio en “H”. “H” sustituye a “F” y “L” a “G”. El orificio en “H” creará un punto de luz sobre “L” al acercarnos a la alineación, que conseguiremos cuando el punto de luz esté en el centro exacto de “L”. En ese momento se hará la lectura en el péndulo como en el caso anterior. Imagino (el autor no lo dice) que con un papel o similar se mirará hacia a dónde queda inicialmente el punto de luz, para saber cómo mover la mira “H” o cómo tirar de los vértices “B” o “C” (con el hilo en el clavo “H”), hasta conseguir que el punto dé en “L”.

El padre Zaragoza sí que comenta que el punto de luz puede ser mayor o menor según sea el diámetro aparente del sol (y por eso los círculos concéntricos en “L”). Y también que en el orificio de “H” se puede poner un cristal cóncavo de modo que enfoque la luz en un punto sobre “L”, aunque creo que esto solo servirá para una distancia entre “H” y “L”, y el autor indica con “H” en “A” (*“que una los rayos a la distancia del lado AC”*, p.168).

Los otros instrumentos

Para los instrumentos secundarios para topografía, el autor no dedica un capítulo, sino apartados (por ejemplo a continuación del triángulo equilátero).

El primero es el **triángulo equilátero menor**, que solo tiene dos pies y medio de lado (75,5 cm), “y de ancho como AC (Fig. 52)” (p.169). Por desgracia no tengo manera de medir la altura “real” de esta figura:

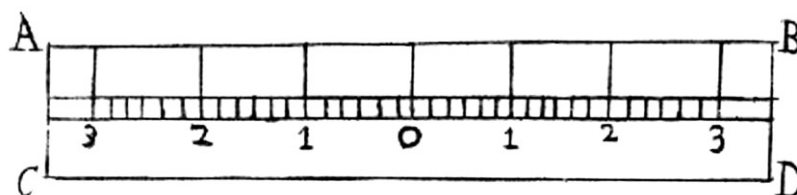


Lámina VII, figura 52

Este triángulo solo tiene las divisiones en grados numeradas más las cinco de las decenas de minutos. Según el autor *“da más verdad que los astrolabios y semicírculos y es más fácil de manejar”* (p.169). Puesto en horizontal sobre el trípode como el triángulo grande (cada lado atornillado en una cartela superior), se le coloca encima el triángulo filar, sobre la línea “BC” (ver las líneas y letras del triángulo equilátero mayor), y con éste se localiza la primera referencia (lugar, edificio...) moviendo horizontalmente el triángulo. A continuación, con el triángulo equilátero menor quieto, se mueve el triángulo filar de modo que apunte a la segunda referencia, manteniendo su paso por el vértice “C”. La nueva posición del triángulo filar marcará, sobre el triángulo equilátero menor, el ángulo entre las dos referencias (por ejemplo, si queda según “CD” el ángulo es 30°).

Si el ángulo entre referencias es superior a los 60° se cambiará el triángulo filar del vértice “C” al “A” o al “B” según convenga, y el observador se pondrá a uno u otro lado del triángulo equilátero menor, cubriendo así los 360°. El error por esta variación del centro “*es insensible en las distancias grandes*” (p.171).

El segundo es el **anteojo**, hecho por el autor y que puede llevar dos o cuatro cristales convexos, según se quiera observar el firmamento o algo en la tierra (menor claridad pero imágenes al derecho). Aunque no incluye imagen del anteojo, sí que describe el listón para sustentarlo, con dos semicírculos para su encaje y a los que se ata con dos cintas (o cordeles...).

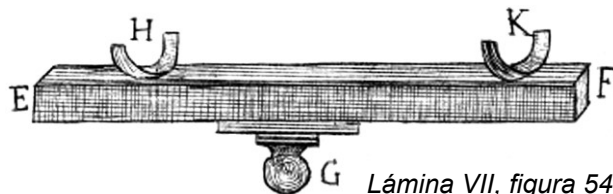


Lámina VII, figura 54

En el pomillo “G” se une al pie multiusos de modo que el anteojo puede rotar en todas direcciones y alturas. Además, el anteojo dispone de un disco con una retícula para dibujar objetos a distancia (las manchas de la luna, una plaza enemiga...).

El tercero es la **cadenilla** de 10 pasos geométricos (15,09 m) formada por eslabones elípticos. Cada pie (30,2 cm) va indicado con un eslabón circular pequeño, y los pasos (cada cinco pies) con un eslabón circular mayor.

El cuarto es el **compás de varilla**, que sirve para tomar las medidas grandes el compás de proporción (por ejemplo para marcar los trastes en la guitarra mencionados en el círculo harmónico).

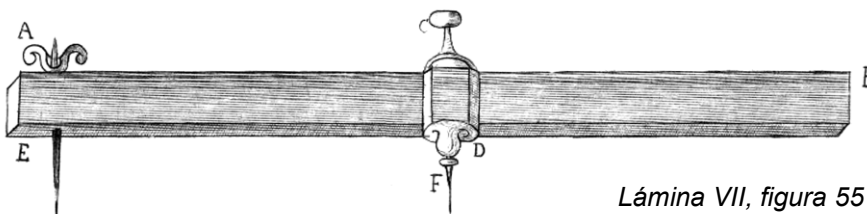
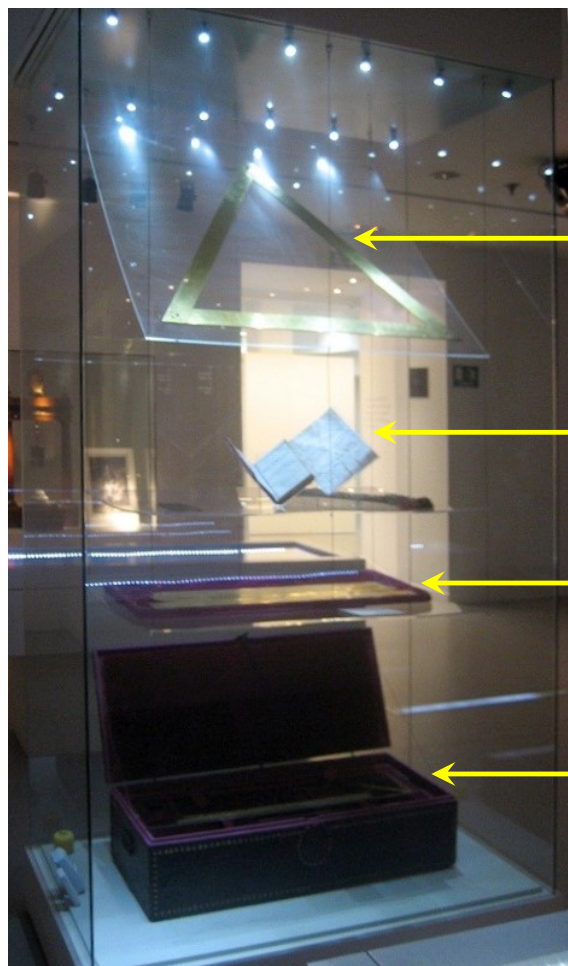


Lámina VII, figura 55

El último instrumento secundario (no cuento la mesa ni el trípode multiusos) es la **escuadra** de campaña de una vara (83,5 cm) de latón.



Triángulo Equilátero

Libro abierto y mostrando lámina

Regla de Latón y Compás de Proporción

Arcón con los otros instrumentos (en bandejas)

[7a]

¿Dónde están los instrumentos?

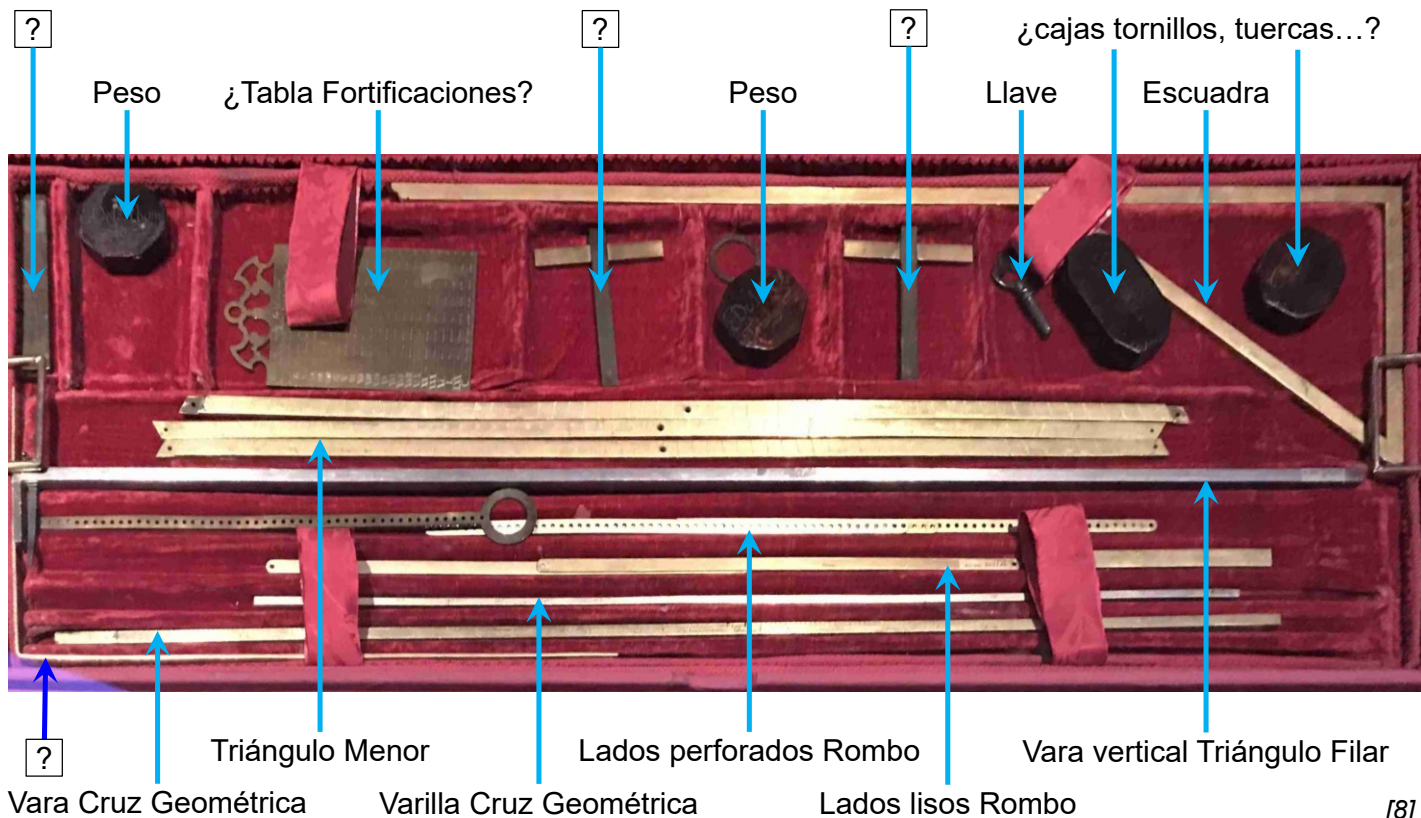
En 2018 el arcón se podía ver en una exposición temática denominada “Cosmos” en la Biblioteca Nacional de Madrid (BNM). Como el arcón “*aparece en los inventarios de la Biblioteca Real Pública (antecedente directo de la Nacional) desde el año de su fundación: 1.711 [7]*”, asumo que aún sigue ahí, aunque no tengo claro si se puede ver. En definitiva, he tenido la suerte de encontrar unas cuantas fotos en Internet, en la web “Turismo Matemático” [7], y nuestro colega Rafael Jené compartió una imagen de dicha exposición en el foro ARC [8]. A partir de éstas he intentado identificar los instrumentos en el arcón.

En la imagen de la izquierda, de la exposición de 2011, podemos ver una de las bandejas que incluye el arcón. Yo he podido contar cuatro pisos, aunque el último, el fondo, no está claro. En esta primera bandeja entiendo que están la regla de latón y el compás de proporción, dejando espacio para incluir, también, el triángulo equilátero desmontado.

Vaya por adelantado que no he podido identificar todos los instrumentos y componentes (no todos se ven), y hay

algún elemento que no he sabido para qué es. En la web [7] hay un comentario del propio museo en el que se reconoce que el anteojo ya desapareció en el siglo XIX, imagino que con su soporte.

En el segundo nivel se encuentra la mayoría de instrumentos:



[8]

Con un interrogante he marcado aquellos elementos de los que desconozco su uso, o de los que no estoy seguro, como las que asumo como cajas de tornillos y tuercas. A destacar la que supongo una tabla de fortificaciones (explicada en la

pantómetro militar), pues ampliando mucho la imagen intuyo una numeración romana en la columna de la izquierda, del IV al XX, XXX, XL, LXX y C, aunque parece que incluye (además de las filas) una columna o dos más que la tabla del libro (p.33):

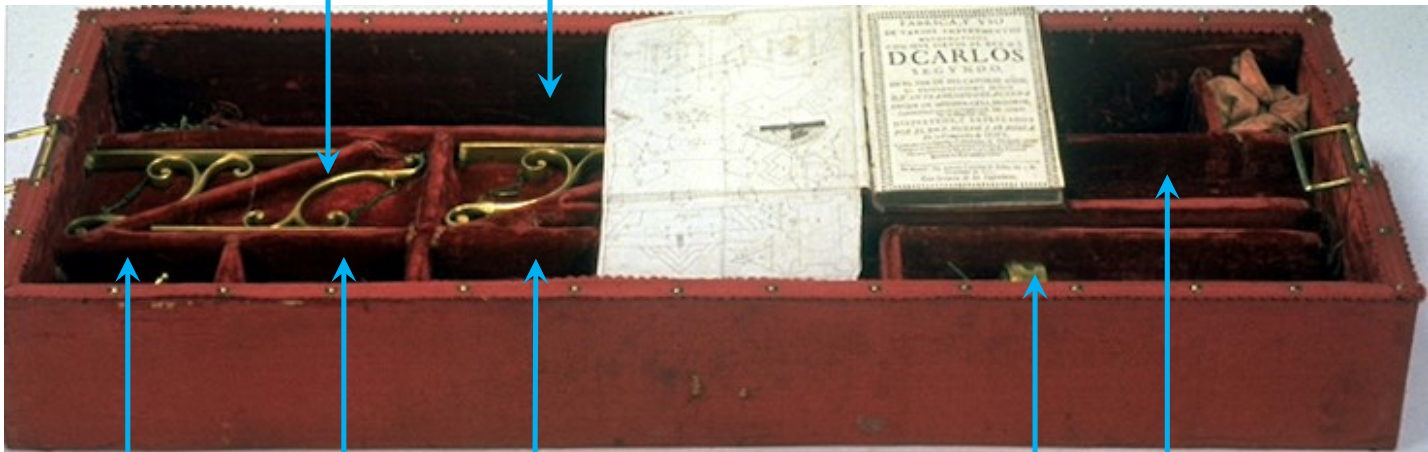


Tabla de la Fortificacion Real					
Figur.	Radio.	Lado.	Semigo	Tra-	Angulo.
	Passos	Passos.	la.	ues.	Grados.
			Passos.	Passos	
IV	103.1	146.	23.	21.	90. 00
V	131.0	154.	27.	27.	72. 00
VI	160.0	160.	30.	30.	60. 00
VII	185.2	162	31.	30	51. 26.
VIII	214.1	164	32.	30	45. 00
IX	242.2	165	33.	30	40. 00
X	271.4	168	34.	30	36. 00
XI	301.3	170	35.	30	32. 44
XII	332.1	172	36.	30	30. 00
XV	418.2	174	37.	30	24. 00
XX	562.3	176	38.	30	18. 00
L	1414.1	178	39.	30	7. 12
Recta.	Infin.	180	40.	30	Recta.

En el tercer nivel, de mayor profundidad, empiezan los elementos voluminosos, y muchos de ellos no se ven:

Cartelas para soportar la Mesa o los Triángulos

¿alojamiento del Anteojo?



¿Alojamientos para las Miras?

¿Complementos para fijar los triángulos y la mesa al Pie?

[7b]

Aunque el libro aparece en esta imagen, no creo que sea aquí donde tiene su alojamiento. Las cartelas las reconozco de su imagen en la figura 51 de la lámina 7 donde aparecen (“N”) ya atornilladas a uno de los complementos del pie (“GHL”), quizá el único que asoma un poco en la foto (abajo a la derecha).

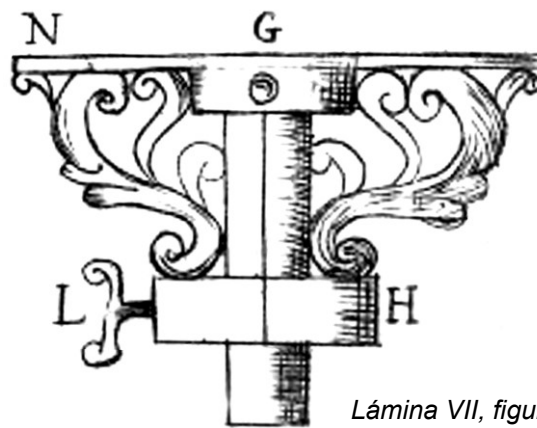
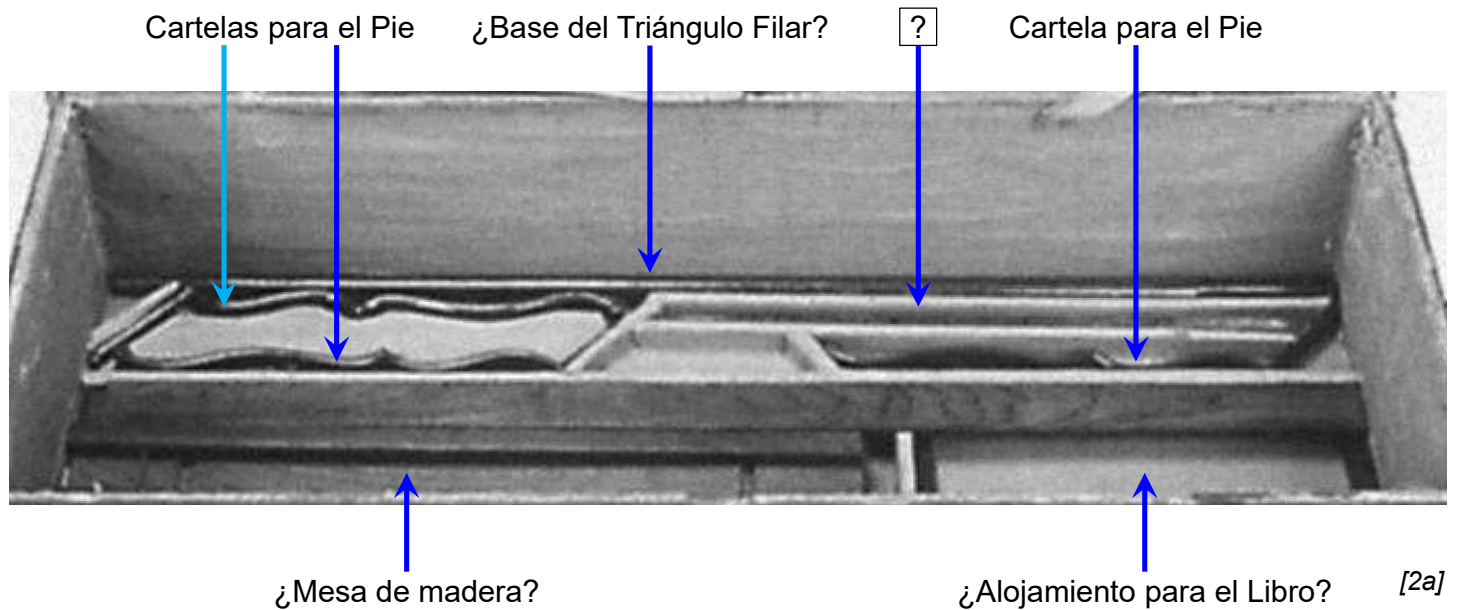


Lámina VII, figura 51

El cuarto y último nivel es el fondo de la caja, del cual solo dispongo una imagen en blanco y negro [2]:



Intuyo que el par de tubos que forman el eje del Pie Multiusos deberían estar en este nivel, quizá sobre los alojamientos de la Mesa y el Libro. Tampoco he encontrado la Cadenilla de 10 pasos, el centro de la Cruz Geométrica y el Compás de Varilla, además de las miras, los hilos y los tornillos especiales, aunque estos últimos los supongo en las cajas de la segunda bandeja, y la Cajuela de Flandes, aunque imagino que ésta pasó enseguida al conjunto de artículos personales de Carlos II, quedando separada del arcón.

Comentario Final

Espero haber presentado con suficiente detalle los instrumentos en este arcón tan interesante. Como ya he dicho, el que sea el regalo para un rey me da a entender que indica su alto interés, coste y tecnología para la época. Pero, después de leer casi todo el libro, me resulta un poco chocante el alto nivel matemático y tecnológico de las explicaciones, teniendo en cuenta que el destinatario era un niño de catorce años, del cual no he leído que tuviera una capacidad intelectual destacada. Sin ir más lejos, los logaritmos, que se explican en nuestro sistema educativo a los quince años, se dan por entendidos y asumidos en el libro.

Quizá el libro tenía que ser, además de un regalo, una guía para los ingenieros y matemáticos de la época, asumiendo el padre Zaragoza, nuevo profesor del rey, que ya tendría tiempo para explicar todo aquello que el discípulo no entendiera. Además, es curioso el comentario final del autor: *"Esto es, Señor, lo que en el breve espacio de un mes ha podido conseguir... el deseo de servir a Vuestra Majestad"* (p.221-222). Me cuesta creer que fuera posible escribir el libro y fabricar todos los instrumentos, partiendo de cero, en un mes. Más creíble me parece que ya tuviera parte de los instrumentos o que los encargara a otros maestros artesanos (los jesuitas Baltasar de Alcázar y Juan Carlos Andosilla colaboraron según [3]), y que el libro incluyera capítulos suyos ya escritos con anterioridad.

En cualquier caso, eso no le quita mérito, como bien detalla [2] en cuanto a la parte musical, y al hecho de que se le reconoció como supervisor de proyectos militares (además tiene una publicación *"Tratado de arquitectura militar"* de 1674). Vale la pena leer la bibliografía de José Zaragoza, ya de la RAH [3] o en la misma Wikipedia.

Agradecimientos

Es curioso como llegué a conocer al autor, el arcón y su libro. Mientras escribo esto Klaus Kühn ya tiene lista su segunda versión de "Calculating with Tones: the logarithmic logic of music" [6], y en su apartado 6.4.2 hace una descripción del Compás Harmónico de José Zaragoza. Para aclarar unos conceptos en dicho libro, pues está en Castellano antiguo, no solo en vocabulario y gramática, sino también en ortografía, Klaus contactó conmigo. Ya habíamos tenido algún contacto previo relacionados con José Zaragoza y Juan Caramuel el otro Jesuita que editó una tabla de logaritmos en aquel tiempo, el primer español en hacerlo, aunque no en España (que lo hizo Zaragoza).

Así que hay que agradecer al infatigable estudio de Klaus, que dio con este documento, que se atrevió a leerlo, y que me picó la curiosidad para emprender el escrito que ahora termina. A mí me llamó mucho la atención un compás de proporción "tamaño maxi" y solo con dos escalas coincidentes con las del diseño común de este instrumento (ya versión francesa o inglesa).

Curioso también, que en [2] establecen el profundo conocimiento de estos instrumentos en España, mencionando a Michiel Coignet, (1549 - 1623), un matemático Flamenco en la corte española de Flandes, que si bien pudiera ser candidato a su invención, sí parece que entre 1580-90 estudió sistemáticamente su potencial, y fue base para los trabajos de Galileo. Habría que contrastar sus varias referencias bibliográficas con lo que Wikipedia dice de Guidobaldo Del Monte (1545 – 1607), sobre que "*su invento de un instrumento de dibujo para construir polígonos regulares y dividir una línea en cualquier número de segmentos se incorporó como una utilidad más del compás geométrico y militar de Galileo*". Otra investigación necesitada de un autor...

Bibliografía

[1a] José Zaragoza: "Fábrica y uso de varios instrumentos matemáticos, con que sirvió al Rey N.S. D. Carlos Segundo, en el día de sus catorce años, el excelentísimo señor D. Juan Francisco de la Cerda, Duque de Medinaceli, Segorbe, Cardona y Alcalá, Sumiller de Corps de Su Majestad, etc. dispuestos y explicados por el Reverendísimo Padre José Zaragoza de la Compañía de Jesús" En Madrid por Antonio Francisco de Zafra, día 5 noviembre 1675

[1b] José Zaragoza: "Fábrica y uso de varios instrumentos matemáticos". [Vínculo en Internet](#)

[2a] Cristina Bordas, Luis Robledo, Tess Knighton: "Jose Zaragoza's Box: Science and Music in Charles II's Spain". Oxford Journals, Oxford University Press, Early Music, Vol. 26, No. 3 (Aug., 1998), pp. 391-413

[2b] Cristina Bordas Ibáñez, Luis Robledo Estaire: "El arcón de José Zaragoza: ciencia y música en la España de Carlos II". Nasserre: Revista aragonesa de musicología, ISSN 0213-7305, Vol. 15, N° 1-2, 1999, págs. 265-314

[3] Víctor Navarro Brotons: "Biografía de José de Zaragoza". Real Academia de la Historia. [Vínculo en Internet](#)

[4] Wikipedia: "Vara". [Vínculo en Internet](#)

[5] Gonzalo Martín: "El Compás de Proporción". Diciembre 2007. [Vínculo en Internet](#)

[6] Klaus Kühn & Rodger Shepherd: "Calculating with Tones: the logarithmic logic of music". The Oughtred Society. Edition 2.0. Spring 2003

[7a] Wordpress.com: Turismo Matemático. "Arcón matemático de Carlos II en Madrid". 21 de julio de 2011. [Vínculo en Internet](#)

[7b] Wordpress.com: Turismo Matemático. "El arcón matemático de Carlos II". 14 de marzo de 2009. [Vínculo en Internet](#)

[8] ARC, Amigos de las Reglas de Cálculo: Hilo "Turismo Coleccionista" en el foro, respuesta 31560 de Rafael Jené. [Vínculo en Internet](#)

[9] María Ruiz Trapero: "El Real de a Ocho: Su Importancia y Trascendencia". "IV Jornadas Científicas sobre Documentación de Castilla e Indias en el siglo XVI". Universidad Complutense de Madrid. 2005. 4º párrafo, página 370. [Vínculo en Internet](#)

*** Fin del Documento ***